:❶

أ) بين ان:

$$\forall n\in\mathbb{N}:\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ب) بين ان : $\forall a\in\mathbb{R}_+^{*},\forall n\in\mathbb{N}:(1+a)^n\geq 1+na$

:❷

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة في $\mathbb{N}$ بما يلي

$$\begin{cases}u_0=3\\ \forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{4}{3}\end{cases}$$

1. بين أن المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=u_n-2$ متتالية هندسية
2. احسب $S'_n=v_0+v_1+...+v_n$ ثم استنتج أن $S_n=u_0+u_1+...+u_n$
3. احسب $\sum_{k=1}^{n}k$ ثم استنتج $\Pi_n=v_0.v_1...v_n$

:❸

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة في $\mathbb{N}$ بما يلي

$$\begin{cases}u_0=3\\ \forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=\frac{4u_n-2}{u_n+1}\end{cases}$$

1. بين أنه مهما يكن $n\in\mathbb{N}$ فإن $u_n\neq -1$
2. بين أن المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=\frac{u_n-2}{u_n-1}$ متتالية هندسية
3. احسب v_n و u_n بدلالة n

:❹

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و (v_n) المتتاليتين المعر فتين بما يلي

$$\forall n\in\mathbb{N}\begin{cases}u_0=0\\ u_{n+1}=\frac{7u_n-12}{3u_n-5}\end{cases}$$

$$v_n=\frac{1}{u_n-2}$$

بين ان (v_n) متتالية حسا بية مع تحديد أساسها وحدها الأول ثم احسب u_n بدلالة n

:❺

احسب نهاية المتتالية (u_n) المعرفة بما يلى في كل من الحالات الاتية :

$$u_n=\frac{7}{5}n^2+n-1;=\frac{n}{n^2+1};u_n=\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}$$

$$u_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+7}};u_n=\arctan(\frac{\sqrt{3}n+1}{n+5})$$

$$u_n=\frac{\sin\left(6+\sqrt[3]{\arctan(n)}\right)}{3^n}$$

$$u_n=n^{-5/7};u_n=\frac{7}{n^{1/2}};u_n=\frac{\sqrt[5]{n}}{n^7}$$

$$u_n=n\tan(\frac{1}{n});u_n=\frac{2^n-1}{3^n}$$

$$u_n=\frac{(-2)^n+3^n}{2^n+5^n};u_n=\frac{2-7^n}{1+7^n}$$

$$u_n=\frac{(-1)^n}{2n+3},u_n=\frac{3n-6(-1)^n}{(-1)^{n+1}+5n}$$

$$\forall n\geq 1;u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+k}}$$

$$\forall n\geq 2;u_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

❻ نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بمايلي:

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=\sqrt{\dfrac{u_n+1}{2}} \end{cases}$$

1. اثبت ان $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0\prec u_n\prec 1$
2. اثبت ان $\forall n\in\mathbb{N}$
   - a- $u_n\prec u_{n+1}$
   - b- $|u_{n+1}-1|\leq\frac{1}{2}|u_n-1|$
   - c- $|u_n-1|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-1|$
3. استنتج نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

❼

1. بين انه لكل **n** من $\mathbb{N}^*$ المعادلة $\sum_{k=1}^{n}x^k=1$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $[0,1]$
2. احسب a_1 و a_2
3. بين ان المتتالة (a_n) تناقصية قطعا
4. بين انه لكل **n** من $\mathbb{N}$ بحيث $n>2$: $0<a_n<\frac{3}{4}$
5. بين انه لكل **n** من $\mathbb{N}$ بحيث $n>2$: $2a_n=1+a_n^{\ n+1}$
6. ثم حدد $\lim_{n\to+\infty}a_n\,;\ \lim_{n\to+\infty}a_n^{\ n+1}$
7. نضع لكل **n** من $\mathbb{N}$ بحيث $n>2$: $u_n=a_n-\frac{1}{2}$ بين ان : $(1+2u_n)^{n+1}=2^{n+2}u_n$
8. استنتج ان : $0\leq u_n\leq\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

❽:

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n=n.q^n$$

حيث **q** عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0,\frac{1}{2}[$

1. أ) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تناقصية
2. ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة
3. أ) بين أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad n\leq 2^{n-1}$

   ب) إستنتج $\lim_{n\to+\infty}u_n$

❾ نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n>1}$ المعرفة بما يلي

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}\quad u_n=\sqrt[n]{a}$$

حيث **a** عدد حقيقي موجب قطعا

1. نفترض أن **a≥1**

   أ) بين أن $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}\quad 0\leq u_n-1<\frac{a}{n}$ (

   ب) إستنتج $Lim\sqrt[n]{a}$
2. أحسب نهاية $(u_n)_{n>1}$ عندما يكون **a<1**

❶0 نعتبر المتتالية $(u_n)_{n>0}$ المعرفة بما يلي

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^k}$$

1. بين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^k}=\frac{1}{n}\left(u_n-\frac{n}{n^n}\right)$
2. إستنتج أن $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n=\frac{n}{(n-1)^2}-\frac{n^2}{(n-1)^2}\left(\frac{1}{n}\right)^n$
3. حدد نهاية المتتالية $(u_n)_{n>0}$

❶❶ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} u_0=a \\ \forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=u_n+[u_n] \end{cases}$$

حيث **a** عدد حقيقي لا ينتمي إلى المجال $[0,1[$

1. بين أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad [u_n]\equiv 2^n[a]$
2. إستنتج حسب قيم **a** نهاية المتتالية (u_n)

❶❷: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n^{\ 2} - 3}{u_n + 2} \end{cases}$$

1. بين انه لكل **n** من $\mathbb{N}$ لدينا :

a) $u_n > 3$

b) $u_{n+1} - 3 > \dfrac{3}{2}(u_n - 3)$

c) $u_{n+1} > u_n$

d) $u_n > \left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 3$

2. استنتج نهاية (u_n)

❶❸ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} u_0 = a - \dfrac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n^2 + (1-2a)u_n + a^2 \end{cases}$$

حيث **a** عدد حقيقي

و نعتبر الدالة العددية **f** المعرفة بما يلي

$f(x) = x^2 + (1-2a)x + a^2$

1. أ) بين أن $f([a-1, a]) \subset [a-1, a]$

ب) إستنتج أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad a-1 \le u_n \le a$

2. أ) بين أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \ge x$

ب) إستنتج أن المتتالية (u_n) تزايدية

3. أ) بين أن (u_n) متقاربة

ب) بين أن $Lim\ u_n = a$

❶❹ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} u_0 = -\dfrac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{\sqrt{1 + u_n^{\ 2}}} - 1 \end{cases}$$

و نعتبر الدالة العددية **f** المعرفة بما يلي

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} - 1$

1,أ) بين أن $f(]-1, 0[) \subset]-1, 0[$

1. ب) إستنتج أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \le u_n \le 0$

2. أ)بين أن المتتالية (u_n) تناقصية قطعا

ب) بين أن (u_n) متقاربة

3. أ) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة **f(x)=x**

ب) بين أن $Lim\ u_n \le -\dfrac{1}{2}$

ج) إستنتج نهاية المتتالية (u_n)

❶❺: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \end{cases}$$

حيث **a** عدد حقيقي موجب قطعا يخالف 1

1,أ)بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n > \sqrt{a}$

ب) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية قطعا

ج) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة

2,بين أن $Lim\ \ u_n = \sqrt{a}$

❶❻ نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بما يلي

- $0 < u_0 < v_0$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n v_n = u_0 v_0$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n)$

1. أ) بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n < v_n$

ب) إستنتج أن (u_n) تزايدية و (v_n) تناقصية

2. أ) بين أن $v_{n+1} - u_{n+1} < \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$

ب) إستنتج أنهما متحاديتان

3. حدد نهايتي المتتاليتين (u_n) و (v_n)

❶❼: ليكن **k** عددا حقيقيا أكبر من أو يساوي 1. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} u_0 = k \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = k + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

نعتبر المتتاليتين العدديتين (x_n) و (y_n) المعرفتين بما يلي

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = u_{2n}$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad y_n = u_{2n+1}$$

1. بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad k \le u_n < k+1$
2. أ) بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = k + \dfrac{x_n}{kx_n + 1}$

ب) بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad y_{n+1} = k + \dfrac{y_n}{ky_n + 1}$

ج) إستنتج أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < y_n$

3. أ) بين أن المتتالية (x_n) تزايدية

ب) إستنتج أن المتتالية (y_n) تناقصية

ج) بين أن المتتاليتين (x_n) و (y_n) متحاديتان

4. أ) حدد α نهاية المتتالية (x_n)

ب) بين أن

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| < \left(\frac{1}{\alpha k}\right)^n |k - \alpha|$$

ج) إستنتج $Lim\ u_n = Lim\ x_n$

❶❽:

بين ان (u_n) و (v_n) بحيث

$$\begin{cases} u_n = 2^{n+1}\sin(\dfrac{\pi}{2^n}) \\ v_n = 2^{n+1}\tan(\dfrac{\pi}{2^n}) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$$

متحاديتـــــــان ثـــــم حـــــــدد نهايتهما

❶❾

نعتبر المتتالية (S_n) المعرفة بمايلي:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

نضع: $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = S_{2n}, v_n = S_{2n+1}$

بين ان (u_n) و (v_n) متحاديتان

❷0 نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) بحيث :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \begin{cases} u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \\ v_n = u_n + \dfrac{1}{2n^2} \end{cases}$$

1. ببين ان (u_n) و (v_n) متحاديتان
2. لتكن **l** نهايتهما , حدد عددا صحيحا طبيعيا **p** لكي تكون u_p قيمة مقربة للعدد **l** بالدقة 0,01

❷❶

نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = a \ ; \ v_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sqrt{u_{n-1}\ v_{n-1}} \ ; \ v_n = \dfrac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} \end{cases}$$

حيث **a** و **b** عددان حقيقيان و **0<a<b<3a**

1. أ) بين بالترجع أن $0 < u_n < v_n$

ب) بين أن (u_n) تزايدية و (v_n) تناقصية

ج) بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متحاديتان

2. لتكن α النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) . بين أن $a \le \alpha \le b$